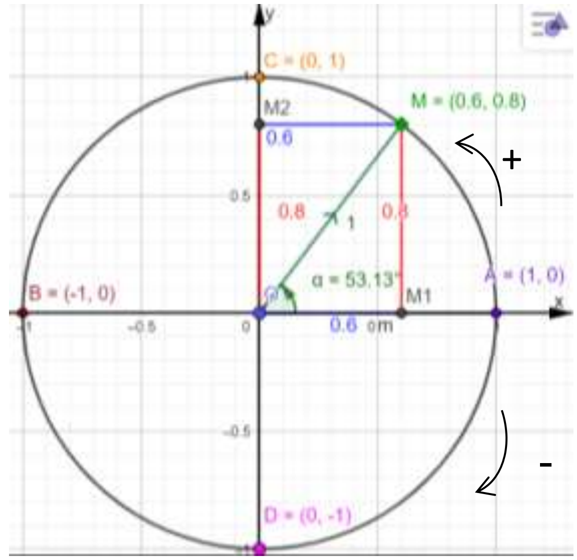
# Elemente de trigonometrie

## Cercul trigonometric




**Definiție**. Într-un reper cartezian $xOy$, numim cerc trigonometric, cercul orientat cu centrul în originea reperului cartezian și de rază 1.

Cercul tigonometric are un sens direct (pozitiv, trigonometric) invers acului de ceasornic și un sens invers (negativ).

$\boldsymbol{M(x_M, y_M) \in C(O, 1)}$

$\Delta OMM_1: dreptunghic, \widehat{MM_1O} = 90^0$

$OM = 1;\ \ OM_1 = x_M;\ \ MM_1 = y_M$

$\alpha = \widehat{MOM_1}$

$$\sin\alpha = \frac{MM_1}{OM} = y_M$$

$$\cos\alpha = \frac{OM_1}{OM} = x_M$$

$\boldsymbol{M(\cos\alpha, \sin\alpha)}$

$MM_1{}^2 + OM_1{}^2 = OM^2 \ \Leftrightarrow\ \ \boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

$$tg\ \alpha = \frac{MM_1}{OM_1}, \qquad ctg\ \alpha = \frac{OM_1}{MM_1}$$

$$\boldsymbol{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{OM_1}{OM} = \boldsymbol{\cos\alpha};\ \ \boldsymbol{\cos(90^0 - \alpha)} = \frac{MM_1}{OM} = \boldsymbol{\sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{tg\ (90^0 - \alpha)} = \frac{MM_1}{OM_1} \boldsymbol{= ctg\ \alpha};\ \boldsymbol{ctg\ (90^0 - \alpha)} = \frac{OM_1}{MM_1} = \boldsymbol{tg\ \alpha}$$

**Definiție**: Un radian corespunde unui arc de cerc cu lungimea egală cu raza cercului.

Lungimea cercului este egală cu: $2\pi R$

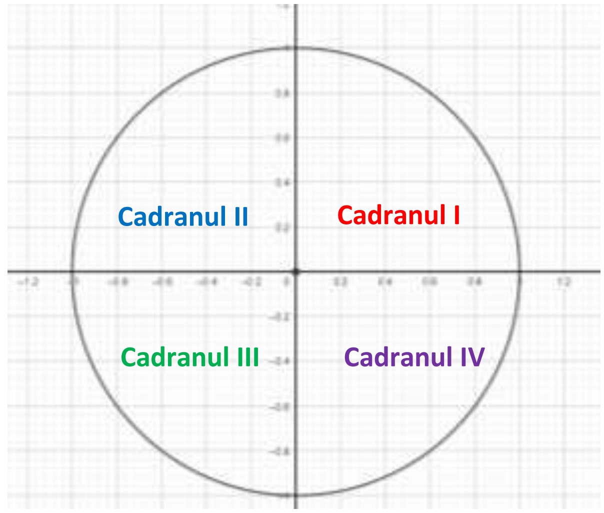
Unghiul alungit are măsura: $180^0$

$$\boldsymbol{\pi\ radiani = 180^0}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{n \cdot \pi}{180^0}\ radiani\ (n - grade)}$$



## Cadranele cercului trigonometric:




**Cadranul I:** $\boldsymbol{\alpha \in (0^0, 90^0), \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$

**Cadranul II:** $\boldsymbol{\alpha \in (90^0, 180^0), \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}$

**Cadranul III:** $\boldsymbol{\alpha \in (180^0, 270^0), \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)}$

**Cadranul IV:** $\boldsymbol{\alpha \in (270^0, 360^0), \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)}$

## Funcția sinus:

$sin: R \rightarrow [-1,1]$

**Proprietate**: Funcția *sinus* este **periodică**, cu perioada principală $2\pi$.

$$\boldsymbol{\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall x \in R}$$

**Proprietate**: Funcția *sinus* este **mărginită:** $\boldsymbol{-1 \leq \sin x \leq 1, \ \forall x \in R}$.

**Proprietate**: Funcția *sinus* este **impară:** $\boldsymbol{sin(-x) = -sin\, x, \forall x \in R}$

**Graficul funcției sinus**

$\boldsymbol{G_{sin}} \cap \boldsymbol{Ox}$: $sin\, x = 0 \Rightarrow x \in \{k\pi | k \in Z\}, \qquad A_k(k\pi, 0), k \in Z$

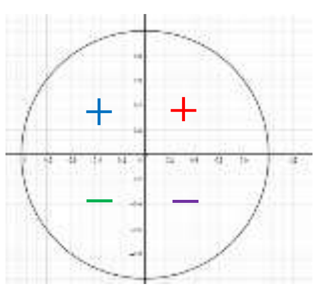
$\boldsymbol{G_{sin}} \cap \boldsymbol{Oy}$: $sin\, 0 = 0 \Rightarrow O(0,0)$

**Proprietate**:

Funcția *sinus* este **strict crescătoare pe intervalele:** $\boldsymbol{\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z}$

Funcția *sinus* este **strict descrescătoare pe intervalele:** $\boldsymbol{\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z}$

**Semnul funcției sinus:**





## Funcția cosinus:

$cos: R \to [-1,1]$

**Proprietate**: Funcția $cosinus$ este **periodică**, cu perioada principală $2\pi$.

$$\mathbf{\cos\,(x + 2k\pi) = \cos x\,, \forall x \in R}$$

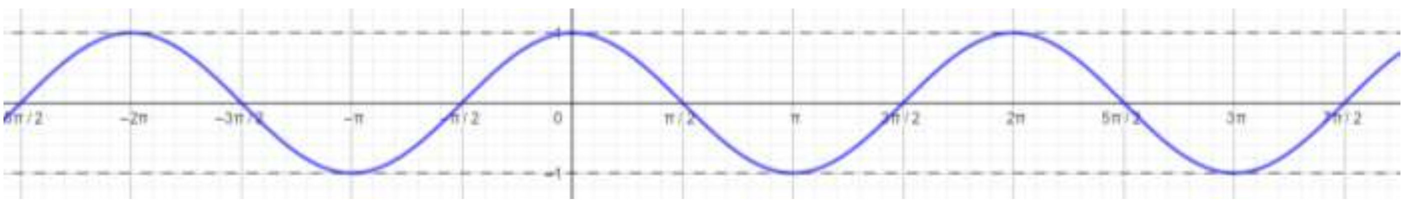
**Proprietate**: Funcția $cosinus$ este **mărginită:** $\mathbf{-1 \le \cos x \ \le 1}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$ .

**Proprietate**: Funcția $cosinus$ este **pară:** $\boldsymbol{cos\ (-x) = cos\ x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$

**Graficul funcției cosinus**

$\boldsymbol{G_{cos}} \cap \boldsymbol{Ox}$: $cos\ x = 0 \ \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \middle| k \in Z\right\}$, $\qquad A_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right), k \in Z$

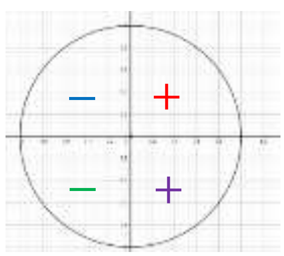
$\boldsymbol{G_{cos}} \cap \boldsymbol{Oy}$: $cos\ 0 = 1 \ \Rightarrow C(0,1)$




**Proprietate**:

Funcția $cosinus$ este **strict crescătoare** pe intervalele: $[\pi + 2k\pi, 2k\pi], k \in Z$

Funcția $cosinus$ este **strict descrescătoare** pe intervalele: $[2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in Z$

**Semnul funcției cos:** 


**Formula fundamentală a trigonometriei:** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in R$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \sin x \ \cdot \sin x\,; \ \ \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$$

$$\cos x^2 = \cos(x \cdot x)\ \ ; \ \ \sin x^2 = \sin(x \cdot x)$$



**Funcția tangentă:** $\boldsymbol{tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}}$

$tg: R\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in Z\right\} \to R$

**Proprietate**:  Funcția $tangent$ă este **periodică**, cu perioada principală $\pi$.

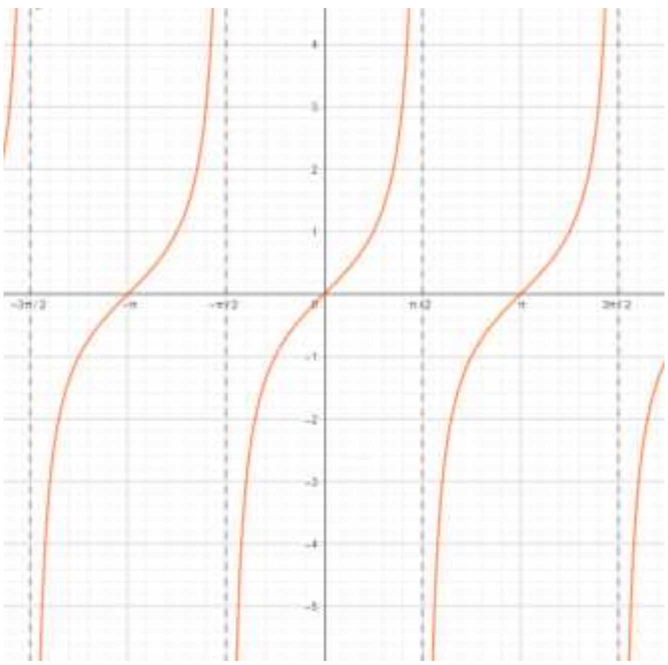
$$\mathbf{tg}\ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k\pi}) = \mathbf{tg}\ \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\backslash\left\{(\mathbf{2}\boldsymbol{k} + \mathbf{1})\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} | \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}\right\}$$

**Proprietate**:  Funcția $tangent$ă e **impară:** $\boldsymbol{tg\ (-x) = -\ tg\ x, \forall x \in R\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in Z\right\}}$

**Graficul funcției tangenă**

$\boldsymbol{G_{tg}} \cap \boldsymbol{Ox}$:  $tg\ x = 0 \ \Rightarrow x \in \{k\pi | k \in Z\}$,        $A_k(k\pi, 0), k \in Z$

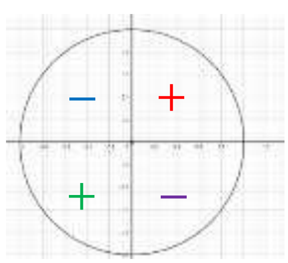
$\boldsymbol{G_{tg}}\ \cap \boldsymbol{Oy}$: $tg\ 0 = 0 \ \Rightarrow O(0,0)$



**Proprietate**:  Funcția $tangent$ă este **strict crescătoare.**

**Proprietate**:  Funcția $tangent$ă este **nemărginită.**

**Semnul funcției tangentă:**





## Funcția cotangentă: $\boldsymbol{ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}}$

$ctg: R\setminus\{k\pi | k \in Z\} \to R$

**Proprietate**: Funcția $ctg$ este **periodică**, cu perioada principală $\pi$.

$$\mathbf{ctg}\,(\boldsymbol{x + k\pi}) = \mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}\,, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\setminus\{\boldsymbol{k\pi}|\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}\}$$

**Proprietate**: Funcția $cotangent$ă este **impară:** $\boldsymbol{ctg\ (-x) = -\ ctg\ x, \forall x \in R\setminus\{k\pi|k \in Z\}}$

**Graficul funcției cotangenă**

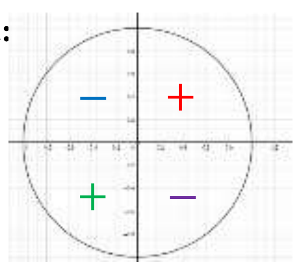
$\boldsymbol{G_{ctg}} \cap \boldsymbol{Ox}$: $ctg\ x = 0\ \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in Z\right\}$, $\qquad A_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right), k \in Z$

Graficul funcției cotangentă nu intersectează axa $Oy$

**Proprietate**: Funcția $cotangent$ă este **strict descrescătoare.**

**Proprietate**: Funcția $cotangent$ă este **nemărginită.**

**Semnul funcției cotangentă:**






| $x$ (*grade*) | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ | $360^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$(*radiani*) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $0$ | | $0$ |
| $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ | | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | | $0$ | |

## Formule de reducere la primul cadran

$$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \pi - \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \pi + \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \quad 2\pi - \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

*Cadranul II*→ *Cadranul I*

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

*Cadranul III*→ *Cadranul I*

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

*Cadranul IV*→ *Cadranul I*

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$

$$\alpha \in (0, 90^0) \quad 180^0 - \alpha \in (90^0, 180^0) \quad 180^0 + \alpha \in (180^0, 270^0) \quad 360^0 - \alpha \in (270^0, 360^0)$$

*Cadranul II*→ *Cadranul I*

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos \alpha$

*Cadranul III*→ *Cadranul I*

$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos \alpha$

*Cadranul IV*→ *Cadranul I*

$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(360^0 - \alpha) = \cos \alpha$

## Funcțiile trigonometrice ale unei sume și ale unei diferențe de unghiuri

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



**Fișă de lucru:**

1. $\sin 30^0 \cdot \cos 30^0 + 2\sin 45^0 \cdot \cos 45^0 - \sin 60^0 \cdot \cos 60^0\ =?$
2. $\sqrt{3} \cdot \cos 30^0 + \sin 30^0 + \frac{1}{2} \cdot \cos 90^0\ =?$
3. $\cos^2 45^0 - \sin^2 30^0\ =?$
4. $\frac{2 \cdot \cos 30^0}{2\, tg\, 45^0 + 1} - tg\ 30^0\ =?$
5. $\sin x = \frac{12}{13}$ , $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x =?$, $tg\ x =?$
6. $\cos x = \frac{3}{5}$ , $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x =?$, $tg\ x =?$
7. Calculați $\cos A$, știind că $A$ este un unghi ascuțit și $\sin A = \frac{4}{5}$
8. Calculați $\cos A$, știind că $A$ este un unghi obtuz și $\sin A = \frac{4}{5}$
9. Dacă $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, arătați că $\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 0$
10. Arătați că $\frac{\sin 135^0}{\cos 45^0} = 1$
11. Calculați: $\sin 80^0 - \sin 100^0 = \sin 80^0 - \sin(180^0 - 80^0) = \sin 80^0 - \sin 80^0 = 0$
12. Calculați: $\cos 40^0 + \cos 140^0 = \cos 40^0 + \cos(180 - 40) = \cos 40^0 - \cos 40^0 = 0$
13. Calculați: $\sin^2 70^0 + \cos^2 110^0 = \sin^2 70^0 + \cos^2(180 - 70) = \sin^2 70^0 + (-\cos 70)^2 = \sin^2 70^0 + \cos^2 70^0 = 1$
14. Calculați: $\sin^2 150^0 + \cos^2 30^0 = \cos^2 30^0 + \sin^2(180 - 30) = \cos^2 30^0 + sin^2 30^0 = 1$
15. Calculați: $\sin 15^0 = \sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$ , $\cos 75^0 =$
16. Calculați: $\sin 120^0 = \sin 2 \cdot 60 = 2 \sin 60 \cos 60$, $\cos 120^0 = \cdots$.
17. Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1, \forall x \in R$
18. Arătați că: $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) - \cos 2x = 0, \forall x \in R$
19. Arătați că $(\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x \in R$
20. Arătați că $(3\sin x + 4\cos x)^2 + (4\cos x - 3\sin x)^2 = 25, \forall x \in R$
21. Arătați că $(a \sin x + b \cos x)^2 + (a \cos x - b \sin x)^2 = a^2 + b^2, \forall x \in R, \forall a, b \in R$
22. Să se verifice egalitățile pentru $x \in R$
    a. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
    b. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
23. Ştiind că $\sin a = \frac{3}{5}$ şi $\cos b = \frac{5}{13}$, $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze valorile funcţiilor trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a - b)$
24. Ştiind că $\cos a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin b = \frac{5}{13}$, $b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, să se calculeze: $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$.
25. Să se verifice egalitătile:
    a. $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
    b. $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$